問題１ (1)

(a)

$f(x) = 1 - \cos x, g(x) = x^2 \cos x$ とおく.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sin x \\
g'(x) &= 2x(\cos x - x \sin x) \\
\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{2 \cos x - x \sin x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{2 \cos x - x^2 \frac{\sin x}{x}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$$

$f(x) = \log(\cos x), g(x) = x^2$ とおく.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \\
g'(x) &= 2x \\
\lim_{x \to 0} \log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\
&= \lim_{x \to 0} -\frac{1}{2} \frac{\tan x}{x} \\
&= -\frac{1}{2} \\
\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \to 0} e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x \to \infty} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \frac{\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right), g(x) = \frac{1}{x}$ とおく.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{2}{(x-1)^2} \\
g'(x) &= -\frac{1}{x^2} \\
\lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} 2\frac{x^2}{(x+1)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} 2\frac{1}{(1+\frac{1}{x})(1-\frac{1}{x})} \\
&= 2 \\
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} e^{\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x} \\
&= e^2
\end{aligned}
$$

(2)

(a) 正しい.

(b) 間違い.

箇所：$\frac{1+\sin x}{1} = 1 + \lim_{x\to\infty} \sin x$

理由：$\lim_{x\to\infty} \sin x$ が収束しないため，分配法則を用いることができないから.

問題 2

(1)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a^x \\
f'(x) &= a^x \log a \\
f''(x) &= a^{2x}(\log a)^2 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= a^{nx}(\log a)^n \\
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= \log a \\
f''(0) &= (\log a)^2 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= (\log a)^n \\
a^x &= 1 + (\log a)x + \frac{(\log a)^2}{2}x^2 + \cdots + \frac{(\log a)^n}{n!} + \cdots
\end{aligned}
$$

(2)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-2x} \\
f'(x) &= \frac{-2}{(1-2x)^2} \\
f''(x) &= \frac{2\cdot 2}{(1-2x)^3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-2)^n}{(1-2x)^{n+1}} \\
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= -2 \\
f''(0) &= 4 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= (-2)^n \\
f(x) &= 1-2x+2x^2+\cdots+\frac{(-2)^n}{n!}x^n+\cdots
\end{aligned}$$

(3)

コーシーの判定法を用いて,

$$\begin{aligned}
|\frac{a_{n+1}}{a_n}| &= |\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(-2)^n} \\
&= \frac{2}{n+1} \to n \to \infty 2 \\
\frac{1}{R} &= 2 \\
R &= \frac{1}{2} \\
\therefore |x| &< \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

問題 3

(1)

$f(x)$ は $a-2 \leqq x \leqq a$ で連続であり $a-2<x<a$ で微分可能だから，平均値の定理より,

$$\begin{aligned}
f'(c_1) &= \frac{f(a)-f(a-2)}{a-(a-2)} \\
&= \frac{f(a)-(-f(a))}{2} \\
&= f(a) \\
&= A
\end{aligned}$$

を満たす $c_1(a-2<x<a)$ が存在する．ゆえに，示された.

(2)

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+2) = -f(x)$ であるから，両辺を x で微分して，

$$f'(x+2) = -f'(x) \ (x \in \mathbb{R})$$

(3)

$f^{(n)}(x+2) = -f^{(n)}(x)$

$$f^{(n)}(c_n) = \frac{f^{(n-1)}(a) - f^{(n-1)}(a-2)}{a-(a-2)}$$