

**1**

座標空間内の点  $A(0, -1, 1)$  をとる.  $xy$  平面上の点  $P$  が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする.

(i)  $P$  は原点  $O$  と異なる.

(ii)  $\angle AOP \geq \frac{2}{3}\pi$

(iii)  $\angle OAP \leq \frac{\pi}{6}$

$P$  がとりうる範囲を  $xy$  平面上に図示せよ.

**2**

次の関数  $f(x)$  を考える.

$$f(x) = \int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2} dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

- (1)  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$  を満たす実数  $\alpha$  で,  $f'(\tan \alpha) = 0$  となるものを求めよ.
- (2) (1) で求めた  $\alpha$  に対し,  $\tan \alpha$  の値を求めよ.
- (3) 関数  $f(x)$  の区間  $0 \leq x \leq 1$  における最大値と最小値を求めよ. 必要ならば,  $0.69 < \log 2 < 0.7$  であることを用いてよい.

**3**

座標平面上を次の規則 (i), (ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える.

- (i) 最初に, P は点  $(2, 1)$  にいる.
- (ii) ある時刻で P が点  $(a, b)$  にいるとき, その 1 秒後には P は
- 確率  $\frac{1}{3}$  で  $x$  軸に関して  $(a, b)$  と対称な点
  - 確率  $\frac{1}{3}$  で  $y$  軸に関して  $(a, b)$  と対称な点
  - 確率  $\frac{1}{6}$  で直線  $y = x$  に関して  $(a, b)$  と対称な点
  - 確率  $\frac{1}{6}$  で直線  $y = -x$  に関して  $(a, b)$  と対称な点  
にいる.

以下の問いに答えよ. ただし, (1)については, 結論のみを書けばよい.

- (1) P がとりうる点の座標をすべて求めよ.
- (2)  $n$  を正の整数とする. 最初から  $n$  秒後に P が点  $(2, 1)$  にいる確率と, 最初から  $n$  秒後に P が点  $(-2, -1)$  にいる確率が等しいことを示せ.
- (3)  $n$  を正の整数とする. 最初から  $n$  秒後に P が点  $(2, 1)$  にいる確率を求めよ.

4

$f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + 4\sqrt{2}$  とおく.  $0 < t < 4$  を満たす実数  $t$  に対し, 座標平面上の点  $(t, f(t))$  を通り, この点において放物線  $y = f(x)$  と共通の接線を持ち,  $x$  軸上に中心を持つ円を  $C_t$  とする.

- (1) 円  $C_t$  の中心の座標を  $(c(t), 0)$ , 半径を  $r(t)$  とおく.  $c(t)$  と  $\{r(t)\}^2$  をともに整数で表せ.
- (2) 実数  $a$  は  $0 < a < f(3)$  を満たすとす. 円  $C_t$  が点  $(3, a)$  を通るような実数  $t$  は  $0 < t < 4$  の範囲にいくつあるか.

**5**

座標空間内に3点  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$  をとり,  $D$  を線分  $AC$  の中点とする. 三角形  $ABD$  の周および内部を  $x$  軸のまわりに1回転させて得られる立体の体積を求めよ.

**6**

2以上の整数で、1とそれ自身以外に正の約数を持たない数を素数という。以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x) = x^3 + 10x^2 + 20x$  とする。  $f(n)$  が素数となるような整数  $n$  をすべて求めよ。
- (2)  $a, b$  を整数の定数とし、  $g(x) = x^3 + ax^2 + bx$  とする。  $g(n)$  が素数となるような整数  $n$  の個数は3個以下であることを示せ。